Сибирский математический журнал
2026.

УДК 517.957

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. У. Уразбоев. М. М. Хасанов

Аннотация. В данной работе исследуется смешанная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с коэффициентом, зависящим от времени, в пространстве периодических функций. Основное внимание уделено определению закона эволюции спектральных данных оператора Дирака с периодическим потенциалом, который соответствует решению рассматриваемой смешанной задачи. На основе полученных результатов реализован метод обратной спектральной задачи для построения решения нелинейного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с переменным по времени коэффициентом в классе периодических функций. Кроме того, доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица в классе периодических функций, обладающих непрерывными производными до третьего порядка включительно. Также установлено, что построенное решение удовлетворяет исходному уравнению.

DOI

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза отрицательного порядка, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина-Трубовица, формулы следов, класс периодических функций.

1. Введение

В работе М.Вадати [1] обоснована применимость метода обратной задачи рассеяния при решении задачи Коши для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ)

$$q_t(x,t) - 6q^2(x,t)q_x(x,t) + q_{xxx}(x,t) = 0.$$

Данное уравнение широко применяется при описании волновых процессов в изотропных средах. Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящены работы [2], [3]

В гемодинамике значительное распространение получила модель, в рамках которой артерия представляется в виде тонкостенной предварительно напряженной упругой трубки переменного радиуса (или со стенозом), а кровь рассматривается как идеальная жидкость [4]. Указанная модель описывается уравнением мКдФ с переменным коэффициентом

$$q_t(x,t) + \mu_2 q^2(x,t)q_x(x,t) + \mu_3 q_{xxx}(x,t) + h(t)q_x(x,t) = 0\,.$$

Здесь μ_2 , μ_3 коэффициенты, характеризующие свойства материала трубки. Величина t представляет собой отмасштабированную координату вдоль оси сосуда после статической

деформации, описывающей осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки. Переменная Eзависит от времени и координаты вдоль оси сосуда. Функция $h(t)$ определяет форму стеноза, а q характеризует среднюю осевую скорость жидкости.

В работах [5–6] с использованием метода обратной спектральной задачи были исследованы другие интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения, содержащие нагруженные члены, в классе периодических функций.

Интерес к интегрируемым уравнениям отрицательного порядка существенно усилился после появления теоремы Олвера, посвященной операторам рекурсии для симметрий эволюционных уравнений [7]. Используя подход Олвера, Вероски получил иерархию уравнений Кортевега–де Фриза отрицательного порядка [8].

Исследованию отрицательно-четных иерархий уравнения мКдФ посвящена работа [9], тогда как смешанные положительные и отрицательные иерархии данного уравнения изучались в работах [10–13].

В работе [13] были исследованы бризерные решения следующего уравнения мКдФ отрицательного порядка

$$\left(\frac{q_{xt}(x,t)}{q(x,t)}\right)_x +(2q^2(x,t))_t= 0\,,$$

или

$$\rho_{xx}(x,t) = q^2(x,t), q_{xt}(x,t) + 2q(x,t)\rho_{xt}(x,t) + \alpha q(x,t) = 0.$$

Нетрудно видеть, что заменой $q(x,t)$ на $iq(x,t)$ и преобразованием $\mu(x,t) = \rho_x(x,t) + \frac{\alpha}{2}t$ уравнение мКдФ отрицательного порядка примет следующий более простой вид

$$\begin{cases} q_{xt}(x,t) = -2q(x,t)\mu_t(x,t) \\ \mu_x(x,t) = -q^2(x,t) \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В работах [14–16] исследованы уравнение мКдФ отрицательного порядка с самосогласованными источниками и свободным членом в классе периодических функций.

В работах [17–25] были исследованы различные нелинейные уравнения отрицательного порядка, содержащие самосогласованный источник.

В настоящей работе метод обратной спектральной задачи используется для интегрирования уравнения мКдФ отрицательного порядка с коэффициентом, зависящим от времени, в классе периодических функций.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для нелинейного уравнения мКдФ отрицательного порядка с коэффициентом, зависящим от времени, в классе периодических функций.

$$\begin{cases} q_{xt}(x,t) = -2q(x,t)\mu_t(x,t) + a(t)q(x,t) \\ \mu_x(x,t) = -q^2(x,t) \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

при следующих условиях

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \tag{2}$$

где $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\beta(t) \in C[0,\ \infty)$,$a(t) \in C[0,\ \infty)$, и $\mu_0(t) \in C^1[0,\ \infty)$ где заданы вещественные функции, $q_0(x)$ имеет период π, а функции $\beta(t)$ и $a(t)$ ограничены. Необходимо определить действительные решения $q(x,t)$ и $\mu(x,t)$ задачи (1)-(2) которые удовлетворяют условиям гладкости

$$\begin{array}{l} q(x,t) \in C^2\left(\mathbb{R} \times (0,\infty)\right) \cap C\left(\mathbb{R} \times [0,\infty)\right), \\ \mu(x,t) \in C^2\left(\mathbb{R} \times [0,\infty)\right) \end{array} \tag{3}$$

и следующим условиям периодичности по переменной x

$$q\left(x+\pi,t\right) = q\left(x,t\right), \mu_t\left(x+\pi,t\right) = \mu_t\left(x,t\right), t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При исследовании задачи (1)–(3) применяется спектральная задача, соответствующая следующему оператору Дирака.

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Цель настоящей работы состоит в построении процедуры нахождения решения $(q(x,t), \mu(x,t))$ задачи (1)-(3), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Дирака (4).

2. Спектральная теория для оператора Дирака с периодическим коэффициентом.

В данном разделе для полноты изложения приводятся основные сведения, относящиеся к обратной спектральной задаче для оператора Дирака с периодическим коэффициентом (см. [26–33]).

Пусть $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ и $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$- решения уравнения

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

при заданных начальных условиях $c(0,\lambda) = (1,\ 0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,\ 1)^T$, где $q(x)$ – действительная непрерывная π-периодическая функция из класса $C^1(\mathbb{R})$, а λ -комплексный параметр.

Через, λ_n $n \in \mathbb{Z}$ мы обозначим собственные значения, пронумерованные в порядке возрастания, либо периодической $(y_1(0) = y_1(\pi),\ y_2(0) = y_2(\pi))$, либо антипериодической $(y_1(0) = -y_1(\pi),\ y_2(0) = -y_2(\pi))$ задачи для уравнения Дирака (5).

Спектр оператора (5) представляется в следующем виде

$$\mathbb{E} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\ \} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\},$$

где $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\ \lambda) + s_2(\pi,\ \lambda)$ называется функцией Ляпунова. Интервалы $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами.

Нули ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (5) и более того $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Набор чисел $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$ и знаков $\sigma_n = sign\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными параметрами задачи (5). Множество спектральных параметров ξ_n, σ_n, $n \in \mathbb{Z}$ и границ спектра λ_n, $n \in \mathbb{Z}$ называется спектральными данными задачи (5). Нахождение спектральных данных задачи (5) называется прямой задачей, а восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (5), вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi)\xi_n, n \in \mathbb{Z},$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина-Трубовица, а также следующая формула следов

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau)), \tag{6}$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Теорема 1. Для действительных непрерывно-дифференцируемых функций $q(x)$ компоненты $\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$ решения (5) удовлетворяют следующим уравнениям

$$-y_1''+[q^2(x)+q'(x)]y_1=\lambda^2 y_1,$$

$$-y_2''+[q^2(x)-q'(x)]y_2=\lambda^2 y_2.$$

Следствие 1. Если $\begin{pmatrix} y_{n,1}(x)\\ y_{n,2}(x)\end{pmatrix}$ является собственной вектор-функцией задачи $y_1(0)=0,\ \ y_1(\pi)=0$, для системы уравнений (5), соответствующей собственному значению ξ_n, и $\xi_n\neq 0$, то $y_{n,1}(x)$ является собственной функцией следующей граничной задачи

$$-y_1''+[q^2(x)+q'(x)]y_1=\nu y_1,$$

$$y_1(0)=0,\ \ y_1(\pi)=0,$$

соответствующей собственному значению ξ_n^2. Здесь ν спектральный параметр.
Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. Пусть вектор-функция $(y_1,\ y_2)^T$ является решением системы (5). Тогда справедливы следующие тождества:

$$2y_2y_1=\frac{1}{2\lambda}[y_2^2-y_1^2]'+\frac{1}{\lambda}q(y_1^2+y_2^2), \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}[y_2^2+y_1^2]'=q(y_1^2-y_2^2). \tag{8}$$

3. Эволюция спектральных параметров.

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2. Если набор $(q(x,t),\mu(x,t))$ является решением задачи (1)-(3), то спектр оператора (4) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(t),\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\left\{q_t(0,t)-\mu_t(0,t)+\frac{a(t)}{2}\right\},\ \ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{9}$$

При этом знаки $\sigma_n(t)=\pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$, и выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0\,,\ \ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{10}$$

где $\xi_n^0,\ \sigma_n^0,\ \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Следуя работе [14], можно доказать , что если $q(x,t)$ решение системы

$$\begin{cases} q_{xt}(x,t) = -2q(x,t)\mu_t(x,t) + G(x,t) \\ _\mu_x(x,t) = -q^2(x,t) \end{cases}, \tag{11}$$

то справедливы следующие равенства

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]\,\{q_t(0,t) - \mu_t(0,t)\} - \frac{1}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)G(x,t)dx,\ \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{12}$$

где $y_n(x,t),\quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле $(y(0)=0,\ \ y(\pi)=0)$ для уравнения (4), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
В соответствии с (1), положим

$$G(x,t) = a(t)q(x,t),$$

и вычислим последний член в (12)

$$-\frac{a(t)}{2\xi_n}\int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)qdx = \frac{1}{4\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]a(t). \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (12), имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]\left\{q_t(0,t) - \mu_t(0,t) + \frac{a(t)}{2}\right\},\ \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{14}$$

Используя (14) и равенство [22]

$$y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)$$

получим уравнение (9).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi) = y(0)$ или антипериодическими $y(\pi) = -y(0)$ граничными условиями, то вместо уравнения (14) получим уравнения $\dot{\lambda}_n = 0$. Таким образом, собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{Z}$ периодической и антипериодической задачи не зависят от параметра t. **Теорема доказана.**

Следствие 2. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задач не зависят от параметров $\tau,\ t$, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от $\tau,\ t$: $\xi_n = \xi_n(\tau,t),\quad \sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае, система (9) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{q_t(\tau,t) - \mu_t(\tau,t) + \frac{a(t)}{2}\right\},\ \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{15}$$

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{16}$$

Используя формулу следов

$$q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi) \tag{17}$$

и равенство $\mu_x = -q^2$, получим, что

$$q_t(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \tag{18}$$

$$\mu(\tau,t) = \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s,t)ds, \tag{19}$$

$$\mu_t(\tau,t) = \mu_0'(t) - 2\int_0^\tau q(s,t)q_t(s,t)ds.$$

Замечание 1. Теперь исследуем существование и единственность решения задачи Коши (15), (16) для системы Дубровина-Трубовица в случае, когда $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

Перепишем систему уравнений Дубровина-Трубовица в виде

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t))}g_n(\xi(\tau,t))f_n(\xi(\tau,t)),$$

$$n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{20}$$

где

$$g_n(\xi) = \frac{\beta(t)}{2\xi_n}e^{2\int_0^x q(\tau,t)d\tau} + \frac{a(t)}{2\xi_n}, f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))\,(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t))^2}},$$

которая рассматривается при начальных условиях

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{21}$$

В системе уравнений Дубровина-Трубовица (20) введем замену переменных

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t)\,, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{22}$$

и на основании равенств

$$\dot{\xi}_n = (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin 2x_n \cdot \dot{x}_n,$$

$$\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)} = \frac{1}{2}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|\sin 2x_n|$$

система (20) может быть переписана в виде

$$\dot{x}_n(\tau,t) = (-1)^n\sigma_n(\tau,t)sign\,\{\sin x_n\cos x_n\}\,g_n(x)f_n(x), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{23}$$

В последней системе знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны, при этом выражение $\sin x_n(\tau,t)\cos x_n(\tau,t)$ также меняет знак на противоположный. Будем выбирать начальные условия в виде

$$x_n(\tau,0) = x_n^0(\tau) = \arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{24}$$

следовательно $\sigma_n(\tau,t)sign\,\{\sin x_n\cos x_n\} = \sigma_n^0(\tau)$. Таким образом, уравнение (23) приводится к виду

$$\dot{x}_n = (-1)^n\sigma_n^0(\tau)g_n(x)f_n(x), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

которое введением обозначения

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x) f_n(x)$$

может быть переписана в виде

$$\frac{dx_n(\tau,t)}{dt} = H_n(...,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),...), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{25}$$

Задачу Коши (25), (24) будем рассматривать в банаховом пространстве

$$\mathbb{K} = \left\{ x(\tau,t) = (...,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),...) \,:\, \|x(\tau,t)\| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \left|x_n(\tau,t)\right| < \infty \right\}$$

В банаховом пространстве K система уравнений Дубровина-Трубовица (25) приводится к одному уравнению

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)) \tag{26}$$

с начальными условиями

$$x_n(\tau,t)|_{t=0} = x_n^0(\tau), x^0 \in \mathbb{K}, \tag{27}$$

где $H(x) = (...,H_{-1}(x),H_0(x),H_1(x),...)$. Известно, что ([32], стр. 181) для того чтобы задача Коши $y' = F(y)$, $y(0) = y^0$ в банаховом пространстве K имела единственное решение достаточно выполнение условия Липшица для функции $F(y)$, т.е.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq const \|x - y\|, \forall\, x, y \in \mathbb{K}.$$

Поэтому достаточно доказать, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве $\mathbb{K}$.

Из условия $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$ следует, что $q_0^2(x)+q_0'(x) \in C^2(\mathbb{R})$, в силу следствия 1 теоремы 1 и асимптотики (см. [33], стр.75) собственных значений оператора Штурма-Лиувилля получим следующие асимптотики

$$\lambda_{2n-1} = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^-}{n^2}, \lambda_{2n} = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^+}{n^2}, \tag{28}$$

где c_1, c_2 постоянные числа и $\{\varepsilon_n^{\pm}\} \in l_2$, $\zeta_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$.
Учитывая вложение $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получим, что $\inf\limits_{k\neq n} |\xi_n - \xi_k| \geq a > 0$.
Используя последнее неравенство и (22), оценим функции
$|f_n(x)|$, $\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right|$ и $|g_n(x)|$, $\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right|$.

Лемма 2. Справедливы следующие оценки:

$$C_1 \leq |f_n(x)| \leq C_2, \left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right| \leq C_3 \zeta_m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{29}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$ не зависят от параметра m и n. Неравенства (29) доказаны в работе [35].

Лемма 3. Справедливы следующие оценки:

$$|g_n(x)| \leq \frac{C_4}{|n|}, \left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right| \leq C_5 \frac{\zeta_m}{n}, \tag{30}$$

где C_4 и C_5 положительные постоянные, независящие от параметров m и n.

Доказательство. Поскольку функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены, то найдутся такие M_1 и M_2, что выполняются неравенства $|\beta(t)| \le M_1$, $|a(t)| \le M_2$. С учетом (22), получим следующие оценки

$$|g_n(x)| \le \frac{1}{2\left|\lambda_{2n-1} + \zeta_n \sin^2 E_n\right|} \times$$

$$\times \left\{ M_1 \exp\left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t)) ds \right| + M_2 \right\} \le \right.$$

$$\le \frac{1}{2A_1 |n|} \times \left\{ M_1 \exp\left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} C_2 \zeta_k ds \right| \right\} + M_2 \right\} \le \frac{C_4}{|n|};$$

$$\left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| \le \frac{1}{2\left|\lambda_{2n-1} + \zeta_n \sin^2 x_n\right|} \times$$

$$\times \left[M_1 \exp\left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t)) ds \right| \right\} \times \right.$$

$$\times \left\{ \left| \int_0^\tau (-1)^{m-1} \zeta_m \sigma_m^0(s) \left(2\cos(2x_m(s,t)) f_m(x(s,t)) + \sin(2x_k(s,t)) \frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m} \right) ds \right| + \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k\neq m}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) \frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m} ds \right| \right\} \right] \le$$

$$\le \frac{1}{2A_1 |n|} \times \left[M_1 \exp\left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} C_2 \zeta_k ds \right| \right\} \left\{ d_1 \zeta_m |\tau| + d_2 \zeta_m^2 |\tau| + \zeta_m \int_0^\tau \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} C_3 \zeta_k ds \right\} \right] \le$$

$$\le C_5 \frac{\zeta_m}{|n|}.$$

Лемма доказана.

Используя результаты леммы 2 и леммы 3, оценим производную функции $F_n(x) = g_n(x) f_n(x)$:

$$\left| \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m} \right| \le \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} f_n(x) + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} g_n(x) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| |f_n(x)| + \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| |g_n(x)| \le C_3 \zeta_m \frac{C_4}{|n|} + C_2 C_5 \frac{\zeta_m}{|n|} \le C \frac{\zeta_m}{|n|},$$

где постоянная $C > 0$, не зависит от n и m.

Лемма 4 . Вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховым пространстве K, т.е. существует константа $L = const > 0$, такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t), y(\tau,t) \in \mathbb{K}$ выполняется следующее неравенство

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| \le L \|x(\tau,t) - y(\tau,t)\|.$$

Доказательство. Используя выражение $H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) F_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ получим равенство

$$|H_n(x(\tau,t)) - H_n(y(\tau,t))| = |F_n(x(\tau,t)) - F_n(y(\tau,t))|.$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(x+t(y-x))$ на отрезке $t \in [0,\, 1]$, получим равенство

$$F_n(x) - F_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}(x_m - y_m),$$

где $\theta = x + t * (y - x)$. Таким образом

$$|H_n(x(\tau,t)) - H_n(y(\tau,t))| = |F_n(x(\tau,t)) - F_n(y(\tau,t))| \le \sum_{m=-\infty,\, m\neq 0}^{\infty} \left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}\right| |x_m(\tau,t) - y_m(\tau,t)| \le$$

$$\le \sum_{m=-\infty,\, m\neq 0}^{\infty} \frac{C}{|n|} |\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}|\, |x_m - y_m| = \frac{C}{|n|} \|x - y\|\,.$$

Теперь оценим норму $\|H(x) - H(y)\|$:

$$\|H(x) - H(y)\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}|\, |H_n(x) - H_n(y)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C}{n} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}|\, \|x - y\| =$$

$$= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C}{n} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}| \right\} \|x - y\| = L \|x - y\|\,,$$

где

$$L = \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \frac{C}{|n|}(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) = C \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \frac{\zeta_n}{|n|} < \infty, (\zeta_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}),$$

т.е. условие Липшица выполнено.

Значит, решение задачи Коши (20)-(21), для всех $t > 0$ существует и единственно.

Следствие 3. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)\,,\ n \in \mathbb{Z}$, соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Далее, решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

для системы уравнений Дубровина (15). После этого по формуле следов

$$q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}$$

определяем $q(x,t)$ и затем определяем $\mu(\tau,t) = \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s,t)ds$.

Замечание 2. Покажем, что пара функций $q(x,t)$, $\mu(x,t)$, удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему Дубровина-Трубовица

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \left\{ q_t(\tau,t) - \mu_t(\tau,t) + \frac{a(t)}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{31}$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right). \tag{32}$$

Дифференцируя по t формулу следов (32) получим

$$2q(\tau,t)q_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=-2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k(\tau,t)\frac{\partial\xi_k(\tau,t)}{\partial t}. \tag{33}$$

Далее, учитывая систему уравнений (31) в (33) получим

$$2q(\tau,t)q_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=$$

$$=\left\{2\left(q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)+\frac{a(t)}{2}\right)\right\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi). \tag{34}$$

С учетом равенства (17) заключаем, что

$$2q(\tau,t)q_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=2q(\tau,t)\left(q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)\right)+a(t)q(\tau,t),$$

$$q_{\tau t}(\tau,t)=-2q(\tau,t)\mu_t(\tau,t)+a(t)q(\tau,t).$$

Дифференцируя равенство (19) по τ, находим $\mu_\tau(\tau,t)=-q^2(\tau,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 32. P. 1681–1681. https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.1456
2. Итс А.Р. Точное интегрирование в римановых -функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1977.
3. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Мат. сб. 1994. Т. 185, No. 8. С. 103–114. https://doi.org/10.1070/SM1995V082N02ABEH003575
4. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. V. 42, No. 1. P. 358–364.
5. Хасанов М.М. Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка с зависящими от времени коэффициентами в классе периодических функций // ДАН РУз. 2026. No. 1. С. 9–13.
6. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций // Известия вузов. Математика. Казань. 2016. С. 87–92. https://doi.org/10.3103/S1066369X16020110
7. Olver P.J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 1212–1215.
8. Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 1733–1736.
9. Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R., Zimerman A.H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. P. 445204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/44/445204
10. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. No. 11. P. 1–13. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/11/115213

11. Gomes J.F., de Melo G.R., Zimerman A.H. A class of mixed integrable models // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. No. 27. P. 1–11. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275208

12. Qiao Z., Strampp W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system // Physica A. 2002. V. 313, No. 3–4. P. 365–380.

13. Jingqun Wang, Lixin Tian, Yingnan Zhang. Breather solutions of a negative order modified Korteweg-de Vries equation and its nonlinear stability // Physics Letters A. 2019. V. 383. P. 1689–1697. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.042

14. Уразбоев Г.У., Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций // Теорет. и матем. физика. 2023. Т. 217, No. 2. С. 317–328. https://doi.org/10.4213/tmf10580

15. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Исмоилов О.Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 80–90. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-630

16. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ismoilov O.B. Integration of the negative-order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions // Differential Equations. 2024. T. 60, No. 12. C. 1757–1766. https://doi.org/10.1134/S123

17. Urazboev G.U., Hasanov M.M. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2022. V. 32. P. 228–239. https://doi.org/10.35634/vm22

18. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Baltaeva I.I. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a special source // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. V. 44. P. 31–43. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

19. Khasanov M.M., Rakhimov I.D. Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions // Chebyshevskii Sbornik. 2023. V. 24. P. 266–275. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

20. Urazboev G.U., Xasanov M.M., Ganjaev O.Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions // International Journal of Applied Mathematics. 2024. V. 37, No. 1. P. 37–46. https://doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4

21. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М. О точных конечнозонных решениях уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка // Теоретическая и математическая физика. 2026. Т. 226, No. 1. С. 104–114. https://doi.org/10.4213/tmf11030

22. Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, No. 4. С. 536–543. https://doi.org/10.1134/S0374064114040116

23. Хасанов М.М., Рахимов И.Д., Азимов Д.Б. Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций // Вестник Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2024. Т. 50. С. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

24. Urazboev G.U., Khasanov M.M. On periodic solutions of the negative order Schrödinger equation with a self-consistent integral source // Sib. Adv. Math. 2025. T. 35. C. 266–275. https://doi.org/10.1134/s1055134425030095

25. Муминов У.Б., Хасанов А.Б. Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами // ТМФ. 2022. Т. 211, No. 1. С. 84–104.

26. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

27. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1978. Т. 30. С. 90–101.

28. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журнал. 2001. No. 3–4. P. 48–55.

29. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // Узб. мат. журнал. 2000. No. 3. С. 40–46.

30. Djakov P.B., Mityagin B.S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators // Russian Math. Surveys. 2006. T. 61, No. 4. C. 663–766. https://doi.org/10.1070/RM2006V061N04ABEH004343

31. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proc. Edinb. Math. Soc. 2017. V. 60. P. 615–633. https://doi.org/10.1017/S0013091516000389

32. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

33. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Уразбоев Гайрат Уразалиевич.
Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни,
ул. Х. Олимжона, 14, Узбекистан, город Ургенч 220100
gayrat71@mail.ru
Хасанов Музаффар Машрипович.
Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни,
ул. Х. Олимжона, 14, Узбекистан, город Ургенч 220100
hmuzaffar@mail.ru